Correction exercices mécanique des fluides

Exercice 18 Établir un bilan des forces

a. Système : balle dans l'air.
Référentiel : terrestre.
Bilan des forces :

- poids $\vec{p} = m.\vec{g}$
- Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\pi_A} = -\rho_{air}.V.\vec{g}$.

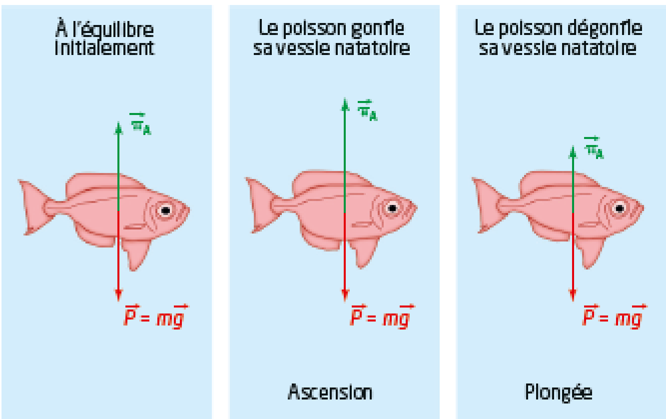
b. Normes des forces :
$p = mg = 2{,}26 \times 10^{-2}$ N et $\pi_A = \rho_{air} \times 4/3\ \pi r^3 \times 1{,}07 \times g = 3{,}37 \times 10^{-4}$ N.
Or, $p/\pi_A = 210$.
On ne peut pas négliger la poussée d'Archimède, mais éventuellement faire un premier modèle en la négligeant et justifier *a posteriori* l'approximation.

Exercice 19 Comprendre le déplacement vertical des poissons

Remarque avant de commencer : les gaz, essentiellement du diazote, du dioxyde, de carbone et du dioxygène, ont une masse volumique, en ordre de grandeur, 1 000 fois inférieure à celle de l'eau liquide (comme l'air).
a. En gonflant ou en dégonflant sa vessie natatoire, le poisson fait varier son volume, à masse constante, donc sa masse volumique : le volume déplacé, donc la poussée d'Archimède, augmente ou diminue ce qui le fait monter ou descendre.
b. Système : poisson.
Référentiel : terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces :

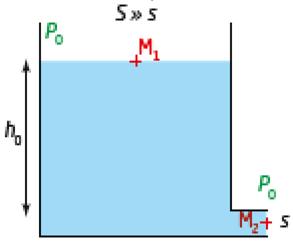
- poids $\vec{p} = m.\vec{g}$
- Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\pi_A} = -\rho_{eau}.V.\vec{g}$.

Initialement, le poisson est statique et on vérifie :
$\vec{p} + \overrightarrow{\pi_A} = (m - \rho_{eau}.V).\vec{g} = \vec{0}$, d'où les mouvements suivants quand il gonfle ou dégonfle sa vessie :



Exercice 26 : Calculer une vitesse d'éjection de vidange

Équation de continuité : $D_v = v_1 \times S = v_2 \times s$
$\Rightarrow v_1 = v_2 \times s/S \rightarrow 0$ car $s \lll S$ et donc $v_1 = 0$



La relation de Bernoulli donne :

$P_0 + \rho g h_0 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh_0}$ **AN:** $v_2 = 4{,}4\ m.s^{-1}$.

Exercice 30 p 333 : Vitesse d'écoulement dans une conduite d'eau

a. Une application directe de la relation de Bernoulli donne :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho v^2.$$

b. D'où :

$$v = \sqrt{2\frac{(P_A - P_B)}{\rho'_{eau}}}.$$

AN : v = 0,27 $m.s^{-1}$.

Exercice 32 p 334 : Trompe à eau.

a. C'est l'effet Venturi. b. La conservation du débit volumique (équation de continuité) donne :

$$D_v = v_A S_A = v_B S_B$$

avec $S_A = \frac{\pi d_A^2}{4}$ et $S_B = \frac{\pi d_B^2}{4}$

Les effets de gravité étant négligeables, la relation de Bernoulli s'écrit en fonction du débit :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho_{eau}\left(v_B^2 - v_A^2\right).$$

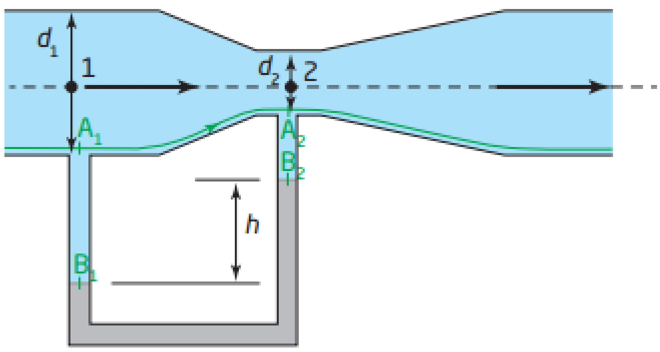
En introduisant le débit volumique et les aires, on obtient :

$$P_A - P_B = \frac{(8\rho_{eau})}{\pi^2} \times D_v^2 \times \left(\frac{1}{d_B^4} - \frac{1}{d_A^4}\right).$$

A.N. : $P_A - P_B = 1{,}3 \times 10^4$ Pa = 0,13 bar. Cette dépression crée une aspiration en C donc en D.

Exercice 35 p 335 : Tube de Venturi

a.



On applique la relation de Bernoulli sur une ligne de courant infiniment proche de la partie inférieure du tube de Venturi. On pose également que $z(A_1) = 0$. La relation de Bernoulli entre les points A_1 et A_2 donne :

$$P_{A_1}+\frac{1}{2}\rho_{eau}v_1^2=P_{A_2}+\frac{1}{2}\rho_{eau}v_2^2+\rho_{eau}g\frac{(d_1-d_2)}{2}$$

Par ailleurs, les colonnes de liquide sous A_1 et A_2 sont à l'équilibre hydrostatique, ce qui donne les relations :

$P_{B_1}=P_{A_1}+\rho_{eau}gA_1B_1$ et $P_{B_2}=P_{A_2}+\rho_{eau}gA_2B_2$.

On en déduit la différence de pression entre B_1 et B_2 :

$$P_{B_1}-P_{B_2}=P_{A_1}-P_{A_2}+\rho_{eau}g\left(A_1B_1-A_2B_2\right).$$

Comme $P_{A_1}-P_{A_2}=\frac{1}{2}\rho_{eau}\left(v_2^2-v_1^2\right)+\rho_{eau}g\frac{(d_1-d_2)}{2}$

et que $A_1B_1+\frac{d_1-d_2}{2}-A_2B_2=h$, on en déduit :

$$P_{B_1}-P_{B_2}=\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2-v_1^2\right)+\rho_{eau}gh.$$

Le mercure est à l'équilibre, avec l'eau et statique.

$P_{B_1}-P_{B_2}=\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2-v_1^2\right)+\rho_{eau}gh.$

Il vérifie donc : $P_{B_1}-P_{B_2}=\rho_{Hg}gh.$

b. On en déduit $\rho_{Hg}gh=\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2-v_1^2\right)+\rho_{eau}gh$ et

$$h=\frac{1}{2g}\frac{\rho_{eau}}{\left(\rho_{Hg}-\rho_{eau}\right)}\left(v_2^2-v_1^2\right).$$

L'équation de continuité donne : $D_V=\frac{\pi d_1^2v_1}{4}=\frac{\pi d_2^2v_2}{4}$

d'où $h=\frac{8}{g}\frac{\rho_{eau}}{\left(\rho_{Hg}-\rho_{eau}\right)}\times\frac{D_V^2}{\pi^2}\times\left(\frac{1}{d_2^4}-\frac{1}{d_1^4}\right)$ et

$$D_V=\sqrt{\frac{\left(\rho_{Hg}-\rho_{eau}\right)gh}{8\rho_{eau}}\times\frac{\pi^2}{\left(\frac{1}{d_2^4}-\frac{1}{d_1^4}\right)}}.$$

A.N. : $D_V=1{,}73\times10^{-4}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}\simeq 10\ \mathrm{L\cdot min^{-1}}$.

Exercice 39 Origine de la poussée d'Archimède

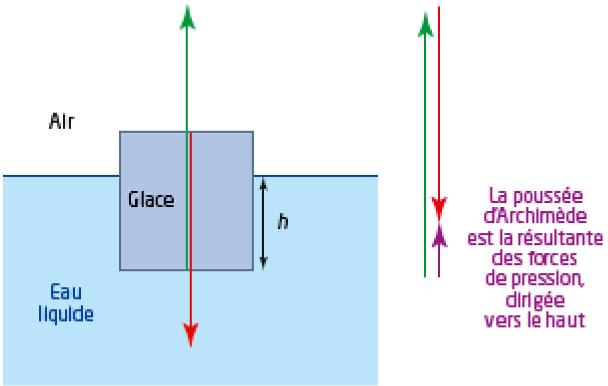
a. On oriente le vecteur $\vec{u_z}$ vers le haut. Dans un fluide au repos en équilibre avec l'air, la pression à la profondeur h donnée par la relation de Bernoulli est : $P = P_0 + \rho_l gh$.

b. L'atmosphère, sur la face supérieure exerce une force pressante vers le bas de norme : $F_1 = P_0 \times a^2$. La force pressante vers le haut due à l'eau liquide à la profondeur h est $F_2 = (P_0 + \rho_l gh) \times a^2$.

Sur les quatre autres faces, la pression de part et d'autre du système considéré a la même valeur. Les forces pressantes horizontales se compensent. La résultante des forces pressantes s'écrit :

$\overrightarrow{\pi_A} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \rho_l.g.a^2.h.\overrightarrow{u_z}$. Le volume a^2h correspond au volume de liquide déplacé donc $\rho_l g a^2 h$ est la norme du poids du liquide déplacé. Le poids du glaçon vaut : $\overrightarrow{p_{glace}} = -\rho_{glace}.g.a^3.\overrightarrow{u_z}$

Pour un glaçon flottant, à l'équilibre :



c. Si le glaçon flotte : $\overrightarrow{\pi_A} + \vec{p} = \vec{0}$

soit $\rho_l.g.a^2.h = -\rho_{glace}.g.a^3$ et *donc* $h = \dfrac{\rho_{glace}}{\rho_l}.a = 0{,}92a$.

La partie immergée représente 92 % du volume total.

Exercice 40 : Syphon

a. L'équation de continuité donne :

$v_D \times \Sigma = v_A \times s = v_B \times s = v_C \times s$

Pour $s \ll \Sigma$, on déduit :

$v_D = v_C \times \dfrac{s}{\Sigma}$

donc $v_D \approx 0$.

b. La relation de Bernoulli appliquée entre les points C et D, où la pression est P_0 donne alors :

$P_0 \times 2 + \rho g z_D = P_0 + \rho g z_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$

On en déduit que :

$v_C = \sqrt{2g(z_D - z_C)}$

La condition pour que le siphon fonctionne est $z_D > z_C$.

A.N. : $v_C = 3{,}7 \text{ m.s}^{-1}$.

c. Pour que le siphon fonctionne, il faut que la pression en B soit positive. La relation de Bernoulli entre les points B et C donne :

$P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = P_C + \rho g z_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$.

Or, d'après l'équation de continuité, $v_B = v_C$ et la pression en C est la pression atmosphérique : $P_C = P_0$. On en déduit la condition :

$P_B = P_a - \rho g(z_B - z_C) > 0 \Leftrightarrow z_B - z_C < \dfrac{P_a}{\rho g} \simeq 10{,}3 \text{ m}$

d. Dans la ligne $z_B - z_C = 80$ cm. Le siphon peut fonctionner. Pour amorcer le siphon, il faut remplir le tuyau d'eau.