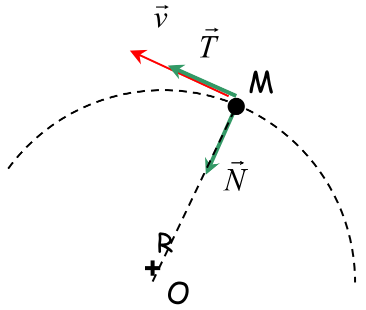
Démonstration de l'expression du vecteur accélération d'un mobile sur une trajectoire curviligne

Rmq : Cette démonstration est hors programme. Elle ne fait aucunement partie des compétences exigibles pour l'épreuve du baccalauréat.

Considérons un mobile M en rotation autour du centre O. Soient $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les deux vecteurs unitaires de la base de Frenet.



Remarquons dans un premier temps que lorsque le point M tourne (sens antihoraire) autour de O il entraîne avec lui la base de Frenet. Autrement dit, les vecteurs unitaires de cette base sont « tournants » eux aussi, c'est à dire qu'ils ne sont pas constants dans le temps puisque leur direction change continuellement
Leur norme reste quant à elle toujours égale à 1.

Pour bien comprendre la démonstration ci-dessous, il faudra porter une attention particulière à la présence ou l'absence de la flèche de l'écriture vectorielle au-dessus des différents termes des expressions littérales.

Considérons l'objet M animé d'une vitesse v représentée sur le schéma par le vecteur $\vec{v}$. Le vecteur vitesse étant par définition tangent à la trajectoire du mobile, on pourra écrire : $\vec{v} = v \cdot \vec{T}$

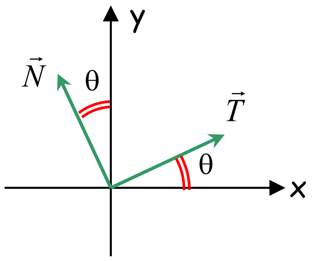
De plus, on sait que la dérivée de la vitesse est égale à l'accélération instantanée, soit : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Donc, en remplaçant : $\vec{a} = \frac{d\left(v \cdot \vec{T}\right)}{dt}$ ou encore $\vec{a} = \left(v \cdot \vec{T}\right)'$

Sachant que $(u \times v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ on peut donc écrire que $\vec{a} = \left(v \cdot \vec{T}\right)' = v' \cdot \vec{T} + v \cdot \vec{T}'$

Ce qui revient à : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \frac{d\left(\vec{T}\right)}{dt}$ ***(Expression 1)***

Dans cette expression, c'est le dernier terme qui pose problème. Il s'agit de savoir à quoi est égale la dérivée du vecteur unitaire $\vec{T}$. Comme nous l'avons souligné plus haut, ce vecteur unitaire n'est pas constant. Sa dérivée n'est donc pas nulle. Plaçons la base de Frenet dans un repère pour mieux comprendre :



Les composantes du vecteur $\vec{T}$ s'écriront donc : $\vec{T}\begin{pmatrix} T\cos\theta \\ T\sin\theta \end{pmatrix}$

Or, la norme d'un vecteur unitaire étant de 1 on aura donc :

$\vec{T}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ car $\left\|\vec{T}\right\| = 1{,}0$

Notons que, comme $\vec{T}$ est « tournant », l'angle θ représenté ci-contre n'est pas constant et dépend donc du temps.
Or, pour dériver un vecteur, il suffit de dériver séparément ses composantes, c'est à dire « cos θ » et « sin θ ».

Mais θ n'est pas une simple variable (comme l'est x en math). C'est une fonction du temps ($\theta = f(t)$)
(On recherche donc des dérivées du type cos(u) et sin(u) et non pas simplement cos(x) et sin(x))

Comme $(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$ et que $(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

Il vient logiquement : $\vec{T}' = \frac{d\vec{T}}{dt} = \begin{pmatrix} -\theta' \cdot \sin\theta \\ \theta' \cdot \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \cdot \sin\theta \\ \dot{\theta} \cdot \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

Or, en regardant sur le schéma du dessus, on remarque facilement que $\vec{N}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

Donc $\vec{T}' = \dot{\theta} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta} \cdot \vec{N}$

Reprenons à présent l'***expression 1*** : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \frac{d(\vec{T})}{dt}$

Nous savons à présent que $\frac{d(\vec{T})}{dt} = \vec{T}' = \dot{\theta} \cdot \vec{N}$

Ce qui donne : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{N}$ ***(Expression 2)***

Or, quand la position x d'un objet varie dans le temps, on définit la vitesse de cet objet comme étant la dérivée de sa position : $v(t) = \dot{x}$

On peut donc faire de même avec θ, car θ est un angle qui varie dans le temps (puisque $\vec{T}$ tourne, faut un peu suivre quand même…). On en déduit que la dérivée de θ (c'est à dire $\dot{\theta}$) est la vitesse angulaire que l'on connaît mieux sous l'appellation ω (oméga).

Tout ça pour dire que : $\dot{\theta} = \omega$

Donc l'***expression 2*** devient : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \omega \cdot \vec{N}$

Et comme on sait que $v = R\omega$, en remplaçant on obtient finalement :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \frac{v}{R} \cdot \vec{N}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}}$$

Revenons pour finir à la figure du haut :

L'accélération à laquelle est soumis le mobile M possède dans le cas général une composant suivant $\vec{T}$ appelée composante tangentielle et une autre suivant $\vec{N}$ appelée composante normale.

D'où $\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N}$ avec $\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} \text{ (= dérivée de la norme de } \vec{v}\text{)} \\ a_N = \frac{v^2}{R} \text{ (Avec R le rayon de courbure)} \end{cases}$