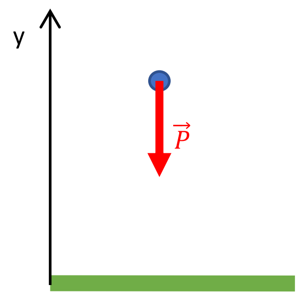
Correction : Il faut sauver Bilbo

Étude du mouvement de l'Orc :

L'Orc se laisse tomber sans vitesse initiale. Il n'est soumis qu'à son poids. On néglige les frottements de l'air.



système : Orc (m_O)
Référentiel : terrestre, supposé galiléen
Conditions initiales :

$$\overrightarrow{OM_0}\begin{pmatrix}0\\H\end{pmatrix};\overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Bilan des forces :

$$\vec{P}\begin{pmatrix}0\\-m_O g\end{pmatrix}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on a :

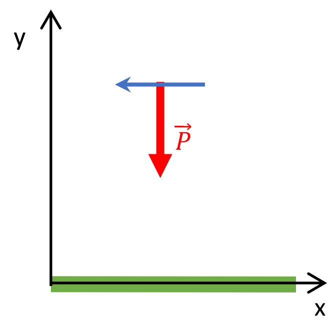
$$\vec{P} = m_O\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m_O}\vec{P} \Rightarrow \vec{a}\begin{pmatrix}0\\-g\end{pmatrix}$$

Par primitives successives, et en prenant en compte les conditions initiales, on obtient alors :

$$\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-gt\end{pmatrix};\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}gt^2+H\end{pmatrix}$$

Étude du mouvement de la flèche :

Si l'Orc se laisse tomber à l'instant t = 0 s, Legolas tire la flèche à un instant Δt.
Si t' est le temps de vol de la flèche, on peut écrire $t' = t - \Delta t$.
La flèche n'est soumise qu'à son poids. On néglige les frottements de l'air.



système : flèche (m_f)
Référentiel : terrestre, supposé galiléen
Conditions initiales :

$$\overrightarrow{OF_0}\begin{pmatrix}D\\h\end{pmatrix};\overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix}-v_0\cos\alpha\\v_0\sin\alpha\end{pmatrix}$$

Bilan des forces :

$$\vec{P}\begin{pmatrix}0\\-m_f g\end{pmatrix}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\vec{P} = m_f\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m_f}\vec{P} \Rightarrow \vec{a}\begin{pmatrix}0\\-g\end{pmatrix}$$

Par primitives successives, et en prenant en compte les conditions initiales, on obtient alors :

$$\vec{v}\begin{pmatrix}-v_0\cos\alpha\\-gt'+v_0\sin\alpha\end{pmatrix};\overrightarrow{OF}\begin{pmatrix}-v_0t'\cos\alpha+D\\-\frac{1}{2}gt'^2+v_0t'\sin\alpha+h\end{pmatrix}$$

Résolution du problème :

Les trajectoires de la flèche et de l'Orc doivent se croiser, dans l'espace et dans le temps.

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{cases} -v_0 t' \cos\alpha + D = 0 \quad (1) \\ -\frac{1}{2} g t'^2 + v_0 t'^{\sin\alpha} + h = -\frac{1}{2} g t^2 + H \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow t' = \frac{D}{v_0 \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow (2) : \ -\frac{1}{2} g \left(\frac{D}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{D}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha + h = -\frac{1}{2} g t^2 + H$$

$$t = t' + \Delta t = \frac{D}{v_0 \cos\alpha} + \Delta t \Rightarrow (2) : \ -\frac{1}{2} g \left(\frac{D}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{D}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha + h = -\frac{1}{2} g \left(\frac{D}{v_0 \cos\alpha} + \Delta t\right)^2 + H$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} g \left(\frac{D}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + D \tan\alpha + h = -\frac{1}{2} g \left(\left(\frac{D}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + 2 \frac{D}{v_0 \cos\alpha} \Delta t + \Delta t^2\right) + H$$

$$\Rightarrow D \tan\alpha + h = -g \frac{D}{v_0 \cos\alpha} \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2 + H \Rightarrow \frac{1}{2} g \Delta t^2 + g \frac{D}{v_0 \cos\alpha} \Delta t + D \tan\alpha + h - H = 0$$

Plusieurs couples (Δt, α) sont possibles pour que Legolas tue l'Orc. On peut donc procéder par tâtonnement « raisonnable », en proposant une première valeur de α = 10°.

$$\left.\begin{array}{r} g = 9{,}8\ m.s^{-2} \\ D = 20\ m \\ v_0 = 30\ m.s^{-1} \\ h = 1{,}5\ m \\ H = 10\ m \\ \alpha = 10° \end{array}\right\} \Rightarrow 4{,}9 \Delta t^2 + 6{,}63 \Delta t - 4{,}97 = 0 \Rightarrow \Delta t = 0{,}54\ s.$$

Si on élimine le temps de réaction de Legolas, qui est de 0,5 s, il doit alors enclencher son tir 0,04 s après avoir vu l'Orc entamer sa chute.